Survey on topological properties of spaces of Riemannian metrics (Algebraic Topology focused on Transformation Groups)

矢ヶ崎, 達彦

数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 70-76

Survey on topological properties of spaces of Riemannian metrics

京都工芸繊維大学 基盤科学系 数学　矢ヶ崎 達彦
Tatsuhiko Yagasaki
Faculty of Arts and Sciences
Kyoto Institute of Technology

§1. 序. 本論説では, 多様体上のリーマン計量の成す空間の位相的な性質に関する F. T. Farrell とその共著者 P. Ontaneda, I. Belegradek, et al. による基本的な結果を紹介する. このテーマに関する最近の進展に関しては 文献 [1] を参照してください.

連結な n 次元 C^∞ 多様体 V に対して, $\widetilde{\mathcal{R}}(V)$ で V 上の C^∞ リーマン計量全体の空間 (コンパクト-開 C^∞-位相) を表す. $\widetilde{\mathcal{R}}(V)$ は Fréchet 空間の凸集合であり, さらに ℓ_2 と同相であることが知られている (cf. I. Belegradek - T. Banakh). リーマン計量 g を考察する際には, 曲率 特に 断面曲率 $\kappa = \kappa_g$ に関して制約を置くことは自然である. F. T. Farrell, P. Ontaneda, I. Belegradek, et al. は, 条件 $\kappa < 0$ 及び $\kappa \geq 0$ に対応する $\widetilde{\mathcal{R}}(V)$ の部分空間を考察している (参考文献 参照). この様な部分空間を扱うため, さらに記号を導入する.

$\mathcal{R}(V)$ で V 上の完備な C^∞ リーマン計量全体の成す $\widetilde{\mathcal{R}}(V)$ の部分空間を表し, 一般に実数の部分集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{R}_{\kappa\subset I}(V) = \{g \in \mathcal{R}(V) \mid \kappa_g \subset I\}$ とおく. 特に重要になるのが, 次の部分空間である :

(1) $\mathcal{R}_{\kappa\leq 0}(V)$: V 上の非正の断面曲率を持つ完備リーマン計量の成す部分空間
　$\mathcal{R}_{\kappa<0}(V)$: V 上の負の断面曲率を持つ完備リーマン計量の成す部分空間
　$\mathcal{R}^{hyp}(V) := \mathcal{R}_{\kappa=-1}(V)$: V 上の完備双曲計量の成す部分空間

(2) $\mathcal{R}_{\kappa\geq 0}(V)$: V 上の非負の断面曲率を持つ完備リーマン計量の成す部分空間

リーマン計量の空間 $\widetilde{\mathcal{R}}(V)$ には V の C^∞ 微分同相群が計量の押し出しで自然に作用する. $\mathrm{Diff}(V)$ で V の C^∞ 微分同相全体の成す群 (コンパクト-開 C^∞-位相) を表す. さらに, $\mathrm{Diff}_0(V)$ は $\mathrm{Diff}(V)$ における id_V の弧状連結成分, $\mathrm{Diff}_*(V)$ は id_V とホモトピックな微分同相の成す部分群を表す. 上記の部分空間は $\mathrm{Diff}(V)$ の作用の下で不変であり, 各 $g \in \mathcal{R}(V)$ に対して 写像 $\Lambda_g : \mathrm{Diff}(V) \to \mathcal{R}(V) : \Lambda_g(\varphi) = \varphi_* g$ が得られる.

§2. $\kappa < 0$ の場合.

2 次元の場合, Σ が種数 2 以上の向き付け可能な連結閉曲面のとき, $\mathcal{R}_{\kappa<0}(\Sigma) \simeq *$ となることが知られている (cf. [3]). 実際, Hamilton's Ricci flow を用いて, $\mathcal{R}_{\kappa<0}(\Sigma)$ の $\mathcal{R}^{hyp}(\Sigma)$ への変形レトラクトが構成され, 主束 $\mathrm{Diff}_0(\Sigma) \hookrightarrow \mathcal{R}^{hyp}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{T}^{hyp}(\Sigma)$ において, Teichmüller 空間 $\mathcal{T}^{hyp}(\Sigma) \cong \mathbb{R}^{6\mu-6} \simeq *$, $\mathrm{Diff}_0(\Sigma) \simeq *$ より $\mathcal{R}^{hyp}(\Sigma) \simeq *$ となる. 一方,

高次元では空間 $\mathcal{R}_{\kappa<0}(M)$ は，非常に大きなホモトピー群を持ち得ることが F. T. Farrell - P. Ontaneda [3] に於いて示されている．

M を n 次元 C^∞ 閉多様体とし，$\mathcal{R}_{\kappa<0}(M) \neq \emptyset$ とする．任意の $g \in \mathcal{R}_{\kappa<0}(M)$ に対し写像 $\Lambda_g : \mathrm{Diff}(M) \to \mathcal{R}_{\kappa<0}(M)$ が得られる．

主定理 1.

(1) $n \geq 10$ のとき: $\mathcal{R}_{\kappa<0}(M)$ は無限個の弧状連結成分を持つ．
- さらに，$\pi_0(\Lambda_g) : \pi_0(\mathrm{Diff}(M)) \to \pi_0(\mathcal{R}_{\kappa<0}(M))$ において

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(M)) \supset {}^\exists(\mathbb{Z}_2)^\infty \ \text{ s.t. } \ \pi_0(\Lambda_g)|_{(\mathbb{Z}_2)^\infty} \text{ は one-to-one}$$

(2) $n \geq 14$ のとき: $\pi_1(\mathcal{R}_{\kappa<0}(M), g) \supset (\mathbb{Z}_2)^\infty$
- さらに，$\pi_1(\Lambda_g) : \pi_1(\mathrm{Diff}(M), \mathrm{id}_M) \to \pi_1(\mathcal{R}_{\kappa<0}(M), g) \supset \mathrm{Im}\,\pi_1(\Lambda_g) \supset (\mathbb{Z}_2)^\infty$

(3) $k = 2p-4$ (p : 素数), $1 < k \leq \dfrac{n-8}{3}$ のとき： $\pi_k(\mathcal{R}_{\kappa<0}(M), g) \supset (\mathbb{Z}_p)^\infty$
- さらに，$\pi_k(\Lambda_g) : \pi_k(\mathrm{Diff}(M), \mathrm{id}_M) \to \pi_k(\mathcal{R}_{\kappa<0}(M), g) \supset \mathrm{Im}\,\pi_k(\Lambda_g) \supset (\mathbb{Z}_p)^\infty$

系. $n \geq 10$ で (M, g) が n 次元双曲閉多様体のとき，包含写像 $\iota : \mathcal{R}^{hyp}(M) \subset \mathcal{R}_{\kappa<0}(M)$ は null-homotopic でない．
- さらに，(i) $\mathrm{Im}\,\pi_0\iota$ は無限集合であり，
  (ii) ${}^\exists g' \in \mathcal{R}^{hyp}(M)$ s.t. g と g' は $\mathcal{R}_{\kappa<0}(M)$ においてパスで結べない．

F. T. Farrell - P. Ontaneda [4] では，上記の結果が $\mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M)$ の場合に拡張されている．M は n 次元 C^∞ 閉多様体で，$\pi_1 M$ は双曲的かつ $\mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M) \neq \emptyset$ とする．

主定理 2.

(1) $n \geq 10$ のとき: $\mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M)$ は無限個の弧状連結成分を持つ．

(2) $n \geq 12$ のとき: $\pi_1(\mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M), g) \ > \ (\mathbb{Z}_2)^\infty$

(3) $k = 2p-4$, p : 素数, $2 < p < \dfrac{n+5}{6}$ のとき： $\pi_k\mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M) \ > \ (\mathbb{Z}_p)^\infty$

系. $I \subset (-\infty, 0]$ かつ $\mathcal{R}_{\kappa\in I}(M) \neq \emptyset$ とする．

(1)′ $n \geq 10$ のとき: 包含写像 $\mathcal{R}_{\kappa\in I}(M) \subset \mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M)$ は null-homotopic でない．
- さらに $\pi_0\mathcal{R}_{\kappa\in I}(M) \to \pi_0\mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M)$ は定値でない

(2)′ (n, k) が主定理の (2), (3) の条件を満たすとき: $\pi_k\mathcal{R}_{\kappa\in I}(M) \to \pi_k\mathcal{R}_{\kappa\leq0}(M)$ は零写像ではない．

主定理 1 の応用として，次の問題への反例が与えられている ([3])．

問題. F が閉多様体で $\mathcal{R}_{\kappa<0}(F) \neq \emptyset$ ならば，F をファイバーに持つファイバー束 $E \to B$ はファイバーごとのリーマン計量の滑らかな族 $g_b \in \mathcal{R}_{\kappa<0}(E_b)$ $(b \in B)$ を持つか．

実際, M^n を n 次元負曲率閉多様体 $(n \geq 10)$ とし, (n,k) は主定理 1 の (1), (2), (3) の条件を満たすとする. 主定理 1 に基づいて, $\alpha \in \pi_k \mathrm{Diff}(M)$ で $\pi_k(\Lambda_g)(\alpha) \neq 0$ $({}^\forall g \in \mathcal{R}_{\kappa<0}(M))$ となるものが得られる. この α から Clutching 構成により得られる M 束 $M \hookrightarrow E \to \mathbb{S}^{k+1}$ が反例を与える.

主定理 1 は, Pseudo-isotopies の空間に関する以下の定理 1, 2 から導かれる. まず, 記号を導入する. 多様体 N に対して, $P^0(N)$ で N の C^0 pseudo-isotopies の空間 (コンパクト-開位相) を表す. 以下, (M,g) を n 次元負曲率多様体とし, $\alpha : \mathbb{S}^1 \to M$ を法ベクトル束 $\nu(\alpha)$ が自明な埋め込みとする. このとき, $\mathbb{S}^1$ 上の等長な自明化 $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}, \langle\ ,\ \rangle) \cong (\nu(\alpha), g)$ が存在し, $\alpha(\mathbb{S}^1)$ の管状近傍 $N(\alpha(\mathbb{S}^1)) \subset M$ の部分空間の同一視 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2} \times I \approx N_{[r,2r]}(\alpha(\mathbb{S}^1))$ を得る. これから次の図式が得られる. 但し, Φ は id による拡張であり, ι は包含写像である.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}((\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}) \times I, \partial) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, phantom, "\iota\ \bigcap"] & \mathrm{Diff}(M) \arrow[r, "\Lambda_g"] & \mathcal{R}_{\kappa<0}(M) \\
P^0(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}) & &
\end{tikzcd}$$

定理 1. M が閉多様体で α が null-homotopic でなければ, $k < n-5$ に対して $\mathrm{Ker}\,\pi_k(\Lambda_g \Phi) \subset \mathrm{Ker}\,\pi_k(\iota)$ が成り立つ.

定理 2. 写像 $\pi_k(\iota) : \pi_k \mathrm{Diff}((\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2}) \times I, \partial) \longrightarrow \pi_k P^0(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2})$ について, 次が成り立つ:

(1) $k = 2p-4$ (p : 素数), $\max\{9, 6p-5\} < n$ のとき
- (i) $\pi_k \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2} \times I, \partial) \supset (\mathbb{Z}_p)^\infty$
- (ii) $\pi_k(\iota)|_{(\mathbb{Z}_p)^\infty}$: 単射　(iii) $\pi_k(\Lambda_g \Phi)|_{(\mathbb{Z}_p)^\infty}$: 単射

(2) $n \geq 14$ のとき
- (i) $\pi_1 \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-2} \times I, \partial) \supset (\mathbb{Z}_2)^\infty$
- (ii) $\pi_1(\iota)|_{(\mathbb{Z}_2)^\infty}$: 単射　(iii) $\pi_1(\Lambda_g \Phi)|_{(\mathbb{Z}_2)^\infty}$: 単射

F. T. Farrell - P. Ontaneda [2] では, さらに, 高次元多様体上の負曲率リーマン計量の Teichmüller 空間や Moduli 空間の位相的性質が考察されている. 次の記号を用いる.

群 $\mathcal{D}(V) = \mathbb{R}^+ \times \mathrm{Diff}(V)$ 及び部分群 $\mathcal{D}_*(V) = \mathbb{R}^+ \times \mathrm{Diff}_*(V)$ を考える. 但し, $\mathbb{R}^+$ は正の実数の成す乗法群を表す. $\mathcal{D}(V)$ は V 上の完備リーマン計量の空間 $\mathcal{R}(V)$ への自然な作用 $\mathcal{D}(V) \curvearrowright \mathcal{R}(V)$: $(\lambda, \varphi)g = \lambda(\varphi_* g)$ を持つ. 商空間 $\mathcal{T}(V) = \mathcal{R}(V)/\mathcal{D}_*(V)$ 及び $\mathcal{M}(V) = \mathcal{R}(V)/\mathcal{D}(V)$ はそれぞれ V 上のリーマン計量の Teichmüller 空間及び Moduli 空間と呼ばれる. 任意の $\varepsilon \in [0,\infty]$ に対して V 上の ε-pinched 負曲率リーマン計量の空間が次で定義される.

$$\mathcal{R}^{\varepsilon}_{\kappa<0}(V) := \left\{ g \in \mathcal{R}_{\kappa<0}(V) \;\middle|\; \frac{\sup|\kappa_g|}{\inf|\kappa_g|} \leq 1 + \varepsilon \right\} \subset \mathcal{R}_{\kappa<0}(V).$$

特に, $\mathcal{R}^0_{\kappa<0}(V)=\{g\in\mathcal{R}(V)\mid\kappa_g\equiv c<0\}$, $\mathcal{R}^\infty_{\kappa<0}(V)=\mathcal{R}_{\kappa<0}(V)$ となる. $\mathcal{R}^\varepsilon_{\kappa<0}(V)$ は $\mathcal{D}(V)$ の作用で不変であり, 商空間 $\mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(V)$ 及び $\mathcal{M}^\varepsilon_{\kappa<0}(V)$ が定義される. これらの空間は, 次の図式にまとめられる:

$$
\begin{array}{ccccccc}
*\simeq\mathcal{R}(V) & \supset & \mathcal{R}_{\kappa<0}(V) & \supset & \mathcal{R}^\varepsilon_{\kappa<0}(V) & \supset & \mathcal{R}^0_{\kappa<0}(V)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathcal{T}(V) & \supset & \mathcal{T}_{\kappa<0}(V) & \supset & \mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(V) & \supset & \mathcal{T}^0_{\kappa<0}(V)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathcal{M}(V) & \supset & \mathcal{M}_{\kappa<0}(V) & \supset & \mathcal{M}^\varepsilon_{\kappa<0}(V) & \supset & \mathcal{M}^0_{\kappa<0}(V)
\end{array}
$$

基本事項. M を n 次元閉双曲多様体とする.

(1) 自然な群準同型 $\gamma:\mathrm{Diff}(M)\longrightarrow\mathrm{Out}(\pi_1(M,x_0))$ は次の群同型を導く:

$$\mathrm{Diff}(M)/\mathrm{Diff}_*(M)\cong\mathrm{Out}(\pi_1(M))$$

$\mathcal{M}(M)\cong\mathcal{T}(M)/\mathrm{Out}(\pi_1(M))$, $\mathcal{M}^\varepsilon_{\kappa<0}(M)\cong\mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(M)/\mathrm{Out}(\pi_1(M))$ $(0\le\varepsilon\le\infty)$ が成り立つ.

(2) $\mathcal{D}_*(M)$ の $\mathcal{R}(M)$ への作用は自由であり, $\mathcal{D}_*(M)$-主束 $\mathcal{D}_*(M)\to\mathcal{R}(M)\to\mathcal{T}(M)$ が得られる. $\mathcal{R}(M)\simeq *$ なので, $\mathcal{T}(M)=B\mathcal{D}_*(M)$ ($\mathcal{D}_*(M)$ の分類空間) となる.

主定理 3. ${}^\forall k_0\ge1$ ${}^\exists n_0$ s.t. ${}^\forall(M,g_0)$: n 次元閉双曲多様体 $(n\ge n_0)$, ${}^\forall\varepsilon>0$

${}^\exists N\to M$: 有限被覆空間 s.t. $1\le{}^\forall k\le k_0$ with $n+k\equiv3 \mod 4$

$i_\#:\pi_k\mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(N)\longrightarrow\pi_k\mathcal{T}(N)$: non zero

特に, 次が成り立つ:

(i) $\pi_k\mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(N)\neq0$ (ii) $p_\#:\pi_k\mathcal{R}^\varepsilon_{\kappa<0}(N)\longrightarrow\pi_k\mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(N)$ は全射でない.

(iii) $k_0\ge4$ ならば $\mathcal{T}^\delta_{\kappa<0}(N)\not\simeq *$ $(\varepsilon\le{}^\forall\delta\le\infty)$

系. $n\ge6$ で $\Theta_{n+1}\neq0$ とし, M を n 次元閉双曲多様体とする. このとき, ${}^\forall\varepsilon>0$

${}^\exists N\to M$: 有限被覆空間 s.t. $\pi_1\mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(N)\neq0$. 特に, $\mathcal{T}^\varepsilon_{\kappa<0}(N)\not\simeq *$ である.

主定理 3 は, 以下の定理 3, 4 を基に導かれる. 次の記号を用いる. $I:=[0,1]$ とし, $\mathcal{G}_n:=\{\varphi\in\mathrm{Diff}_*(\mathbb{S}^{n-1}\times I,\partial)\mid\varphi:\text{an isotopy on }\mathbb{S}^{n-1}\}$ とおく. n 次元双曲多様体 N が与えられたとき, N の中で閉測地球体 $B(p,2r)$ を1つ選び, 同一視 $\mathbb{S}^{n-1}\times[0,1]\approx N_{[r,2r]}(p)$ を固定する. このとき, id による拡張写像 $\Lambda:\mathrm{Diff}_*(\mathbb{S}^{n-1}\times I,\partial)\to\mathrm{Diff}_*(N)$ が定まる.

定理 3. ${}^\forall n\ge0$ ${}^\forall\varepsilon>0$ ${}^\forall K\subset\mathcal{G}_n$: コンパクト部分集合 ${}^\exists r>0$ s.t.

${}^\forall(N,g_0)$: n 次元閉双曲多様体 ${}^\forall p\in N$ with $\mathrm{inj}(N,p)>3r$ に対して

$$
\begin{array}{cccc}
\text{写像} & K & \longrightarrow & \mathcal{R}^\varepsilon_{\kappa<0}(N)\\
 & \varphi & \longmapsto & (\Lambda\varphi)_*g_0
\end{array}
\quad\text{は nulhomotopic.}
$$

定理 4. $^\forall k \geq 0 \quad ^\exists n_1 \geq 0$ s.t. $^\forall n \geq n_1$ with $n+k \equiv 2 \mod 4 \quad ^\exists[\alpha_{k,n}] \in \pi_k(\mathcal{G}_n)$ s.t.
N : n 次元 閉 双曲 π-多様体 $\quad p \in N \quad 0 < 2r < \mathrm{inj}(N,p)$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} \pi_k(\mathcal{G}_n) & \longrightarrow & \pi_k(\mathrm{Diff}_*(\mathbb{S}^{n-1} \times I, \partial)) & \xrightarrow{\pi_k\Lambda} & \pi_k(\mathrm{Diff}_*(N)) \\ [\alpha_{k,n}] & & & & \pi_k\Lambda([\alpha_{k,n}]) \neq 0 \end{array}$$

- さらに, $k=0$ のときは, $n_1 = 6$ に選ぶことができ, $n \geq n_1$ について $\Theta_{n+1} \neq 0$ ならば, 条件 $n+k \equiv 2 \mod 4$ を落とすことが出来る.

ここで, n 次元 π-多様体とは $\mathbb{R}^{2n+2}$ の中に 自明な法ベクトル束を持つ様に埋め込める n 次元多様体のことである. 任意の 双曲 多様体 M は 有限被覆空間 $N \to M$ で N が π-多様体 となるものを持つ (cf. [2]).

§3. $\kappa \geq 0$ (非負 断面曲率) の場合.

I. Belegradek - F. T. Farrell - V. Kapovitch [5] では, 非負 断面曲率 をもつ リーマン計量の空間を考察している. 記号を再掲する. 連結な多様体 V に対して, $\mathcal{R}(V)$ は V 上の完備なリーマン計量の成す空間 (コンパクト-開 C^∞-位相) を表し, $\mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V) = \{g \in \mathcal{R}(V) \mid \kappa_g \geq 0\}$ は非負 断面曲率 をもつ 完備リーマン計量 の成す部分空間を表す. $\mathrm{Diff}\, V$ は $\mathcal{R}(V)$ に自然に作用し, $\mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V)$ はこの作用の下で不変である.

V が 開多様体 の場合, $g \in \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V)$ に対する 構造定理 として, J. Cheeger - D. Gromoll による Soul の 存在定理 がある. V を 連結開多様体 とする.

定理. (J. Cheeger - D. Gromoll) 任意の $g \in \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V)$ に対して, (V, g) の中の 境界を持たない コンパクト 全凸 部分多様体 S_g で, V は S_g の管状近傍の内部と微分同相になるようなものが存在する.

この部分多様体 S_g は (V, g) の a soul と呼ばれる.

定義. V が indecomposable $\iff$ $^\exists g \in \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V)$ s.t. a soul S_g の 法球面束 は section を持たない.

V が indecomposable のとき, 各 $g \in \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V)$ に対して, S_g は一意に定まることが知られている. V の コンパクト部分多様体 の空間を $\mathcal{X}(V)$ で表す.

定理 5. V が indecomposable のとき, 写像 $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V) & \longrightarrow & \mathcal{X}(V) \\ g & & S_g \end{array}$ は連続.

系. (1) 関数 $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V) & \to & (0, \infty] \\ g & & i_g \end{array}$ は連続. $\qquad$ (i_g は S_g の g に関する 法単射半径)

(2) 連続関数 $\sigma : \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V) \to \mathbb{R}$ で $0 < \sigma(g) < i_g$ を満たすものに対して, 写像 $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(V) & \longrightarrow & \mathcal{X}(V) \\ g & & N_g(S_g, \sigma(g)) \end{array}$ は連続. $\qquad$ ($N_g(S_g, \sigma(g))$ は S_g の 閉 $\sigma(g)$-近傍)

N を 境界を持つ コンパクト多様体 とする. 境界 ∂N の カラー近傍 $U = \partial N \times [0,1] \subset N$ を固定する. $P(\partial N)$ は ∂N の C^∞-pseudo isotopies の成す位相群を表し, $\iota_N : P(\partial N) \to \mathrm{Diff}\, N$ は id による拡張写像とする. この写像から準同型 $\pi_k(\iota_N) : \pi_k P(\partial N) \to \pi_k \mathrm{Diff}\, N$ が得られる.

主定理 4. N は コンパクト多様体で $\mathrm{Int}\, N$ は indecomposable とする. このとき,

$$\forall k \geq 2 \quad \forall h \in \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(\mathrm{Int}\, N) \quad \pi_k(\mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(\mathrm{Int}\, N), h) > \exists G \overset{\exists \eta}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Ker}\, \pi_{k-1}(\iota_N)$$

定理 6. E をコンパクト多様体とし, $k \geq 0$, $i \geq 1$ とする.

$\dim \partial E + k > \max\{2i+9, 3i+7\}$ のとき

$$\exists \varepsilon \in \{0,1\} \text{ s.t. } \dim \mathrm{Ker}\, \pi_i^{\mathbb{Q}}\big(\iota_{E \times S^{k+\varepsilon}}\big) \geq \frac{1}{2} \dim \pi_i^{\mathbb{Q}} \mathcal{P}(\partial E) - \dim \pi_i^{\mathbb{Q}} \mathrm{Diff}(E \times D^{k+\varepsilon}, \partial)$$

これらの定理に基づいて次の具体例が得られる.

定理 7. U を 次のいずれかのベクトル束の全空間とする. このとき $\exists m \geq 0$ s.t. $\mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(U \times S^m)$ の 各弧状連結成分は ある非自明な有理ホモトピー群を持つ.

(1) $\mathbb{S}^{2d}$, $\mathbb{C}\mathrm{P}^d$, $\mathbb{H}\mathrm{P}^d$ $(d \geq 2)$ 及び Cayley plane の 接ベクトル束
(2) $\mathbb{H}\mathrm{P}^d$ $(d \geq 1)$ 上の Hopf $\mathbb{R}^4$ or $\mathbb{R}^3$ 束
(3) $\mathbb{S}^4$ 上のオイラー類がゼロでない $\mathbb{R}^4$ 束
(4) $\mathbb{S}^4$ 上の 非自明な $\mathbb{R}^3$ 束

一方, Igor Belegradek - Jing Hu [6] では, 平面 $\mathbb{R}^2$ に対して $\mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(\mathbb{R}^2)$ の位相型を考察している.

主定理 5. $\mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(\mathbb{R}^2) \approx \ell^2$ (同相)

系. Moduli 空間 $\mathcal{M}_{\kappa \geq 0}(\mathbb{R}^2) \equiv \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(\mathbb{R}^2)/\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$ は, 有限被覆次元の閉集合では分離されない.

主定理 5 の証明は, 次の様な議論に基づいている. g_0 を $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ 上の 標準的な ユークリッド計量 とする.

定理. (Blanc - Fiala) $\forall g \in \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(\mathbb{R}^2)$ $\exists \varphi \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{R}^2)$, $\exists u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ s.t. $g = \varphi^*(e^{-2u} g_0)$

各 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して $g_u \equiv e^{-2u} g_0 \in \widetilde{\mathcal{R}}(\mathbb{R}^2)$ とおく.

命題. $\kappa = e^{2u} \Delta u \qquad \therefore\ \kappa \geq 0 \iff \Delta u \geq 0 \quad (u : \text{subharmonic})$

$\mathcal{S} := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid \Delta u \geq 0\}$ とおき, 各 $u \in \mathcal{S}$ に対して

$\alpha(u) := \lim_{r \to \infty} \dfrac{M(r,u)}{\log r} \in [0, \infty]$ と定める. 但し $M(r,u) := \sup\{u(z) \mid |z| = r\}$ $(r > 0)$ である.

定理 8. $u \in \mathcal{S}$ に対して g_u : 完備 $\iff \alpha(u) \leq 1$

$\mathcal{S}_1 := \{u \in \mathcal{S} \mid \alpha(u) \leq 1\}$ とおく.

定理 9. 写像 $\begin{array}{ccc} \Pi : \mathcal{S}_1 \times \mathrm{Diff}^+_{0,1}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathcal{R}_{\kappa \geq 0}(\mathbb{R}^2) \\ (u\ ,\ \varphi) & & g = \varphi^*(e^{-2u} g_0) \end{array}$ は同相写像である.

逆写像 Π^{-1} の連続性の証明には, ベルトラミ方程式の解に関する Earle - Schatz の連続性定理が適用されている. (筆者は, 非力のため, この連続性定理を適用する際の議論をカバー出来ずにいます. 示唆をいただければ感謝致します.)

主定理は, 定理 9 と次の命題から従う.

命題. (1) $\mathrm{Diff}^+_{0,1}(\mathbb{R}^2) \approx \ell^2$ (Yagasaki) (2) $S_1 \approx \ell^2$ (3) $\ell^2 \times \ell^2 \approx \ell^2$

可分 Hilbert 空間 ℓ^2 の位相空間としての特徴付けは, 無限次元位相多様体の理論に基づいている. $S_1 \approx \ell^2$ は S_1 が 可分 Fréchet 空間 $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の 非局所コンパクト閉凸部分集合であることから従う.

最後に, 本論説では, 断面曲率に関係する最も基本的と思われる文献のみを概略的に紹介しました. 関連する多数の文献に関しては, 基本文献のレファレンス等を, さらに, 最近のこのテーマの進展に関しては, 文献 [1] を参照してください.

References.

F. Thomas Farrell, Wilderich Tuschmann, et al:

[1] Oberwolfach Report No. 3/2017, Mini-Workshop: Spaces and moduli spaces of Riemannian metrics, organised by F. T. Farrell and W. Tuschmann, 8 Jan. - 14 Jan., 2017

F. Thomas Farrell, Pedro Ontaneda:

[2] The Teichmüller space of pinched negatively curved metrics on a hyperbolic manifold is not contractible, Ann. of Math. (2) 170 (2009), no. 1, 45 - 65.

[3] On the topology of the space of negatively curved metrics, J. Differential Geom. 86 (2010), no. 2, 273 - 301.

[4] The space of nonpositively curved metrics of a negatively curved manifold, J. Differential Geom. 99 (2015), no. 2, 285 - 311.

Igor Belegradek, F. Thomas Farrell, Vitali Kapovitch:

[5] Space of nonnegatively curved metrics and pseudoisotopies, J. Differential Geom. 105 (2017), no. 3, 345 - 374.

Igor Belegradek, Jing Hu:

[6] Connectedness properties of the space of complete nonnegatively curved planes, Math. Ann. 362 (2015), no. 3-4, 1273 - 1286.
Erratum: Math. Ann. 364 (2016), no. 1-2, 711 - 712.

Faculty of Arts and Sciences,
Graduate School of Science and Technology,
Kyoto Institute of Technology,
Kyoto, 606-8585, Japan
E-mail address: yagasaki@kit.ac.jp